Teoria miary i całki
SPPI IIr. semestr zimowy 2006/7
LISTA 10

13/11/06

Zadanie 1
Wykazać, że jeśli $f \geq g \geq 0$ są funkcjami mierzalnymi, to

$$\int f\,d\mu \geq \int g\,d\mu.$$

Zadanie 2
Udowodnij, że jeśli E jest zbiorem mierzalnym, a f funkcją mierzalną nieujemną ograniczoną przez stałą A, to

$$\int_E f\,d\mu \leq A\mu(E),$$

(gdzie $\int_E f\,d\mu$ definiujemy jako $\int \mathbf{1}_E f\,d\mu$).

Zadanie 3
Wykazać, że jeśli f i g są mierzalne i nieujemne oraz $\alpha \geq 0$ i $\beta \geq 0$, to

$$\int (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int f\,d\mu + \beta \int g\,d\mu.$$

Zadanie 4
Wykazać, że jeśli zbiory E i F są mierzalne i rozłączne oraz f nieujemna i mierzalna, to

$$\int_{E\cup F} f\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_F f\,d\mu.$$

Zadanie 5
Wykazać, że jeśli $\mu(X) < \infty$, f_n i f są nieujemne i f_n dążą do f jednostajnie na X, to

$$\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu.$$

Zadanie 6
Wykazać, że jeśli $\mu(X) < \infty$, f_n i f są nieujemne i ograniczone przez wspólną stałą M oraz f_n dążą do f według miary, to

$$\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu.$$

Zadanie 7
Podać przykłady, że założenie $\mu(X) < \infty$ w dwóch zadaniach poprzednich oraz założenie wspólnej ograniczoności w zadaniu 6 są istotne.

Zadanie 8
Udowodnij, że jeśli f jest funkcją rzeczywistą nieujemną i mierzalną, to

$$\mu_f(E) := \int_E f \, d\mu$$

jest miarą na Σ.
Wskazówka: To zadanie wymaga Tw. Lebesgue'a.

Zadanie 9
Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ (funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych). Wiadomo, że funkcja ta nie jest całkowalna w sensie Riemanna i całka oznaczona

$$\int_0^1 f(x) \, dx$$

nie jest określona. Ile wynosi całka Lebesgue'a

$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda \quad ?$$